Indukce, infima/suprema

pondělí 14. září 2026 17:18

(1)

(a) $(1+x)^n \geq 1+nx, \quad x \geq -1$

Volme $x \geq -1$ a uvažme výrok: $(1+x)^n \geq 1+nx$ $\quad V(n)$

Indukcí dokážeme, že $V(n)$ platí pro $n \in \mathbb{N}_0$.

$V(0)$: $(1+x)^0 = 1 = 1+0\cdot x$ ✓

$V(n) \Rightarrow V(n+1)$: $(1+x)^{n+1} = \underset{\geq 0}{(1+x)}(1+x)^n \overset{IP}{\geq} (1+x)(1+nx) = 1+nx+x+nx^2 \geq 1+(n+1)x$

(b) $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$ $\quad V(n)$ $\quad$ (0^0 definujeme jako 1)

$V(0)$: $(a+b)^0 = 1 = \sum_{k=0}^{0} \binom{0}{0} a^0 b^0$ ✓

$V(n) \Rightarrow V(n+1)$: $(a+b)^{n+1} = (a+b)\cdot(a+b)^n \overset{IP}{=} (a+b)\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1}$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^k b^{n-k+1} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} a^k b^{n-k+1} + \binom{n}{n} a^{n+1} b^0 + \binom{n}{0} a^0 b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1}$$

$$= \binom{n+1}{n+1} a^{n+1} b^0 + \binom{n+1}{0} a^0 b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right] a^k b^{n+1-k}$$

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k+1)!} + \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n!\cdot k + n!\cdot(n-k+1)}{k!\,(n-k+1)!} = \frac{(n+1)!}{k!\,(n+1-k)!} = \binom{n+1}{k}$$

$$= \binom{n+1}{n+1} a^{n+1} b^0 + \binom{n+1}{0} a^0 b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}$$

(2) (a) $a \in f^{-1}(M) \Leftrightarrow f(a) \in M$

$x \in A \Rightarrow f(x) \in f(A) \Leftrightarrow x \in f^{-1}(f(A))$ odtud $x \in A \Rightarrow x \in f^{-1}(f(A))$ a tedy $A \subseteq f^{-1}(f(A))$

$f(M) = \{ f(a) : a \in M \}$

(b)

$y \in f(f^{-1}(B)) \Rightarrow \exists a \in X : (a \in f^{-1}(B)) \wedge (y = f(a)) \Leftrightarrow \exists a \in X : (f(a) \in B) \wedge (y = f(a)) \Rightarrow y \in B$

Tedy $y \in f(f^{-1}(B)) \Rightarrow y \in B$ jinak řečeno $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$

(3)

(a) nechť $a = \max M$, chceme dokázat výroky: a je horní závora M (*)

jestliže x horní závora M, potom $x \geq a$ (**)

} definice $a = \sup M$

(*) platí z definice maxima, pro důkaz (**) volme nějaké x které je horní závorou M.

Protože $a \in M$, platí $x \geq a$ a tedy platí (**). Celkem $a = \sup M$

(b) analogicky k (a)

(4)

(a) $M = (0,1] = \{ x \in \mathbb{R} : 0 < x \leq 1 \}$

- z definice M vidíme, že 0 je dolní závora M a 1 je horní závora M. Protože $1 \in M$ dostáváme okamžitě $1 = \max M = \sup M$ (podle (3a)).
- Dokážeme, že $0 = \inf M$. Volme $x \in \mathbb{R}$ které je dolní závora M. Zjevně $x \leq 1$ (protože $1 \in M$). Pokud $x > 0$ potom $\frac{x}{2} \in M$ a tedy $\frac{x}{2} \geq x$ (x je dolní závora M), což není možné, tedy $x \leq 0$. Celkem $0 = \inf M$. Nakonec, pokud $y = \min M$, potom $y = \inf M = 0$, ale $0 \notin M$, tedy množina M nemá minimum

(b) $M = [0, \infty) = \{ x \in \mathbb{R} : 0 \leq x < \infty \}$

- Opět, 0 je (z definice M) dolní závora M a zároveň $0 \in M$, tedy $0 = \min M = \inf M$.
- Dokážeme, že množina M nemá žádné supremum. Pokud $x = \sup M$, potom $x \geq 1$ ($1 \in M$). Potom ale $2x \in M$ a tedy $2x \leq x$, což není možné.

V následujících příkladech často využíváme tzv Archimedovu vlastnost $\mathbb{R}$:

pro každé $x \in \mathbb{R}$ existuje $n \in \mathbb{N}$, že $n > x$. (A)

(c) $M = \left\{ \frac{m}{m+n} : m, n \in \mathbb{N} \right\}$

- zřejmě $0 \leq \frac{m}{m+n} \leq 1$, $m, n \in \mathbb{N}$. Tedy 0 je dolní závora M a 1 je horní závora M.

Dokážeme, že $0 = \inf M$, zde potřebujeme ověřit výrok: je-li x dolní závora M, potom $x \leq 0$ (x)

$1 = \sup M$, zde potřebujeme: je-li x horní závora M, potom $x \geq 1$ (xx)

- dokážeme (x): nechť x je dolní závora M. Je-li $x > 0$, pak podle (A) existuje $n \in \mathbb{N}$, že $n > \frac{1}{x} - 1$

Po úpravě $\frac{1}{1+n} < x$, což ale není možné, protože $\frac{1}{1+n} \in M$ a x je dolní závora M.

Tedy platí $x \leq 0$ a jsme hotovi

- dokážeme (xx): nechť x je horní závora M. Je-li $x < 1$, pak podle (A) existuje $m \in \mathbb{N}$, že $m > \frac{1}{1-x} - 1$

Po úpravě $x < \frac{m}{m+1}$, opět $\frac{m}{m+1} \in M$ a x nemůže být horní závora M. Tedy platí (xx).

$m > \frac{1}{1-x} - 1 \Leftrightarrow m+1 > \frac{1}{1-x} \Leftrightarrow 1-x > \frac{1}{m+1} \Leftrightarrow x < 1 - \frac{1}{m+1} = \frac{m}{m+1}$

Celkem $1 = \sup M$ a $0 = \inf M$. Protože $0 \notin M$ ani $1 \notin M$ nemá M minimum ani maximum.

(d) $M = \{ n^2 - m^2 : n, m \in \mathbb{N} \}$

Dokážeme, že M nemá žádnou dolní ani horní závoru.

- Nechť $x \in \mathbb{R}$. Podle (A) existuje $n \in \mathbb{N}$, že $n > x+1$. Potom $n^2 - 1 \geq n - 1 > x$, protože $n^2 - 1 \in M$, dostáváme, že x není horní závora. Celkem tedy dostáváme, že žádné $x \in \mathbb{R}$ není horní závora M.

- Nechť $x \in \mathbb{R}$. Víme, že $-x$ není horní závorou M a tedy existuje $a \in M$, $a > -x$.

Odtud $x > -a$ a protože $-a \in M$, dostáváme, že x není dolní závora M.

Celkem tedy dostáváme, že M nemá dolní závoru.

(5) $-A = \{-a : a \in A\}$, $A+B = \{a+b : a \in A, b \in B\}$

(a) $\inf(-A) = -\sup A$

- Nejdřív ukážeme: a je horní závora A $\overset{(*)}{\Leftrightarrow}$ $-a$ je dolní závora $-A$ $\overset{(**)}{(*)}$

Skutečně $(*) \Leftrightarrow (\forall x \in A : x \le a) \Leftrightarrow (\forall x \in A : -x \ge -a) \Leftrightarrow (\forall x \in -A : x \ge -a) \Leftrightarrow (**)$

- Protože $\sup A$ je horní závora A, dostáváme podle $(*)$, že $-\sup A$ je dolní závora $-A$.
- Pokud je x dolní závora $-A$, potom $-x$ je podle $(*)$ horní závora A a tedy $-x \le \sup A$.

Odtud $x \ge -\sup A$.

Celkem tedy $-\sup A = \inf(-A)$ (ověřili jsme obě podmínky na infimum)

(b) - Nechť $c \in A+B$, potom existují $a \in A$, $b \in B$, že $a+b = c$. Potom $c = a+b \le \sup A + \sup B$.

Celkem tedy $\sup A + \sup B$ je horní závora $A+B$.

- Nechť $x < \sup A + \sup B$. Položme $\varepsilon = \sup A + \sup B - x > 0$. Potom $\sup A - \frac{\varepsilon}{2}$ není horní závora A a tedy existuje $a \in A$, že $a > \sup A - \frac{\varepsilon}{2}$. Podobně $\sup A - \frac{\varepsilon}{2}$ není horní závora B a tedy existuje $b \in B$, že $b > \sup B - \frac{\varepsilon}{2}$. Potom $c = a+b \in A+B$ splňuje $c > \sup A - \frac{\varepsilon}{2} + \sup B - \frac{\varepsilon}{2} = \sup A + \sup B - \varepsilon = x$ a tedy x není horní závora $A+B$.
- Celkem jsme ukázali, že $\sup A + \sup B = \sup(A+B)$ (ověřili jsme oba axiomy suprema)

(6)

(a) Dokážeme, že $\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}$

- Pokud $x \in A \cup B$, pak $(x \in A) \vee (x \in B)$ a tedy $x \le \max\{\sup A, \sup B\}$ a $\max\{\sup A, \sup B\}$ je horní závorou $A \cup B$
- Pokud $s < \max\{\sup A, \sup B\}$, potom $(s < \sup A) \vee (s < \sup B)$ a tedy existuje $x \in A \cup B$ splňující $x > s$. Odtud s není horní závorou $A \cup B$.
- Celkem $\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}$

(b) Dokážeme, že existují množiny $A_1, A_2, B_1, B_2 \subset \mathbb{R}$, že platí $\sup A_1 = \sup A_2$, $\sup B_1 = \sup B_2$, ale $\sup(A_1 \cap B_1) \neq \sup(A_2 \cap B_2)$

volme $A_1 = A_2 = \{0, 1\}$, $B_1 = \{1, 2\}$, $B_2 = \{0, 2\}$. Potom $\sup A_1 = \sup A_2 = 1$, a $\sup B_1 = \sup B_2 = 2$.

Dále $\sup(A_1 \cap B_1) = \sup(\{1\}) = 1$ a $\sup(A_2 \cap B_2) = \sup(\{0\}) = 0$.

Hodnotu $\sup(A \cap B)$ tedy obecně pomocí hodnot $\sup A$ a $\sup B$ vyjádřit nelze.